Über unstetige Regelung eindimensionaler Schwingungen

Auszug aus der

Inauguraldissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
der Hohen Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Julius-Maximilians-Universität
Würzburg

von

Hans-Joachim Behnke
aus Luckau (Niederlausitz)

Würzburg 1957

Referent: Professor Dr. Hermann S c h m i d t

Tag der Promotion: 21 12 57

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

Herr Prof. Dr. Herbert B i l h a r z † hat meine Untersuchungen angeregt und gefördert, nach seinem Tode Oktober 1956 übernahm Herr Prof. Dr. Hermann S c h m i d t die Schlußbetreuung der Arbeit.

In der Technik treten häufig unerwünschte Schwingungen auf, deren Eigendämpfung gering ist oder ganz fehlt. Mittels automatisch arbeitenden Apparaturen wird versucht, solche Störbewegungen zu "regeln", d.h., möglichst rasch zum Verschwinden zu bringen. Wegen der apparativen Einfachheit werden unstetig wirkende Regler bevorzugt.

Vor etwa 15 Jahren wurde begonnen, an solche Fragestellungen mit mathematischen Methoden heranzugehen. Bei Vorgabe einer Regelungsfunktion, welche die Arbeitsweise des Regelungsmechanismus beschreibt, wird das Verhalten der geregelten Schwingung untersucht. Insbesondere wird festgestellt, ob die geregelte Bewegung vollständig abklingt oder nicht. Die weitere Frage, ob eine vollständig abklingende geregelte Schwingung auch rascher abklingt als das bei derselben Schwingung ohne Regelung der Fall wäre, wurde bisher für die in der vorliegenden Literatur betrachteten Regelungsfunktionen niemals positiv beantwortet.

Wir bringen hier (im Auszug) ein neues Verfahren zur Regelung eindimensionaler Schwingungen, das durch eine einfache unstetige Funktion beschrieben wird. Der Unterschied gegenüber der bisherigen Literatur besteht nicht nur darin, daß eine neue Regelungsfunktion betrachtet wird, sondern auch in den Methoden und Ergebnissen.

§1. Problemstellung

Eindimensionale gedämpfte Schwingungen werden durch

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} + Dx = 0$$

beschrieben, wenn m,k,D alle positiv sind und $k^2 < 4mD$ ist. Wir schreiben diese Gleichung in der stets erreichbaren Normalform

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + x = 0 \tag{1}$$

(Punkte bedeuten dabei Ableitung nach t).

Geregelte Schwingungen beschreiben wir durch

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + x = -\Gamma(t;x,\dot{x}). \tag{2}$$

Wir untersuchen den Ablauf geregelter Schwingungen, wenn die Regelungsfunktion $\Gamma(t)$ im n-ten Zeitintervall (n = 1,2,3, ...) durch

$$\Gamma(t) = \pm\,(t - t_{n-1})\,\mathrm{sgn}(\dot{x} + \varrho x) \tag{3}$$

gegeben ist. Je nach der Wahl des Vorzeichens in (3) unterscheiden wir System A (positives Vorzeichen) und System B. Jedem Parameterwert ϱ entspricht in der Phasenebene eine (durch den Ursprung gehende) Schaltgerade. Die Wahl der Schaltgeraden bestimmt den Bewegungsablauf entscheidend.

§2. Die geregelte Bewegung bei spezieller Wahl der Schaltgeraden

Wir fassen in diesem Paragraphen die Ergebnisse unseres Verfahrens für System A und $\varrho = 0$ zusammen. Wir bringen noch etwas mehr, denn wir erklären sogleich für jedes reelle $\alpha \geq 1$ eine Regelungsvorschrift, die im Grenzfall $\alpha = +\infty$ in unser eigentliches Verfahren übergeht.

1. Definition der Regelungsvorschrift. Der Verlauf der geregelten Bewegung kann nicht durch einen geschlossenen Ausdruck beschrieben werden. Die Bewegung beginnt bei beliebigen Anfangswerten $(x_0, \dot{x}_0) \neq (0,0)$. Dabei wird die Regelungsfunktion $\Gamma(t)$ durch

$$\Gamma(t) = t \operatorname{sgn} \dot{x}_0 \tag{4}$$

definiert [1]). Sobald $\dot{x}(t) = 0$ wird (bzw. wieder Null wird, falls $\dot{x}_0 = 0$ war), wird der Regler abgeschaltet, d.h. $\Gamma(t) \equiv 0$ gesetzt. Damit ist das erste Zeitintervall zu Ende. Während des zweiten Intervalls läuft der Regler unwirksam in die Nullage zurück, es findet keine Regelung statt. Mathematisch wird dieser Sachverhalt durch $\Gamma(t) \equiv 0$ beschrieben. Danach folgen abwechselnd ein geregeltes ($\Gamma(t) \not\equiv 0$) und ein ungeregeltes ($\Gamma(t) \equiv 0$) Intervall. Jedes Intervall mit ungerader Ordnungszahl ist geregelt, und zwar wird $\Gamma(t)$ durch die Gleichung

$$\Gamma(t) = (t - t_{n-1}) \operatorname{sgn} \dot{x}_{n-1} \qquad (n \text{ ungerade}) \tag{5}$$

erklärt [2]). Dabei ist t_n der Zeitpunkt, an dem das n-te Intervall endet; es ist $t_0 = 0$ und $x(t_n) = x_n$ gesetzt $(n = 1,2,3, \ldots)$. Wir unterscheiden die folgenden Regelungsvorschriften

R_α: Ein ungeregeltes Intervall dauert den α-ten Teil ($\alpha \geq 1$ und reell) der Zeit des vorhergegangenen geregelten Intervalls (technische Re-

---

[1]) Es gilt $\operatorname{sgn} \dot{x}_0 = \pm 1$ für $\dot{x}_0 \gtrless 0$. Für $\dot{x}_0 = 0$ setzen wir fest: $\operatorname{sgn} \dot{x}_0 = \pm 1$, falls $\ddot{x}_0 \gtrless 0$. Der Fall $\dot{x}_0 = \ddot{x}_0 = 0$ kann nicht vorkommen.

[2]) Für $\operatorname{sgn} \dot{x}_{n-1}$ gilt eine der Fußnote [1]) entsprechende Festsetzung.

alisierung: Der Regler läuft unwirksam, aber mit α-facher Arbeitsgeschwindigkeit in die Nullage zurück).

Als Grenzfall haben wir dann

R_∞: Die ungeregelten Intervalle verschwinden, es folgt jedem geregelten Intervall sofort ein neues Regelintervall (der Regler springt in die Nullage zurück).

2. Beschränkung der Untersuchung auf die Anfangsintervalle. Der Einfluß der ungeregelten Intervalle, welche durch (1) beschrieben werden, ist bekannt. Das dritte und alle folgenden Regelintervalle können als erste Intervalle einer neuen Bewegung aufgefaßt werden, deren Anfangswerte mit den Endwerten $(x_2, \dot{x}_2)$ bzw. $(x_{n-1}, \dot{x}_{n-1})$ des zweiten bzw. (n-1)-ten Intervalls übereinstimmen. Daher genügt es, die Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + x = -t \operatorname{sgn} \dot{x}_0 \tag{6}$$

in Abhängigkeit von den Anfangswerten $(x_0, \dot{x}_0)$ zu diskutieren.

3. Ergebnisse.

Hilfssatz 1: Bei der Regelung der Schwingung (1) mit beliebigen Anfangswerten nach einem der Verfahren R_α oder R_∞ ist die Zeitdauer eines jeden Intervalls kleiner als $\frac{\pi}{\omega}$ $(\omega = \sqrt{1 - \zeta^2})$.

Folgerung: Es existieren sowohl An- als auch Abschaltpunkte, und zwar unendlich viele, sofern nicht $x(t)$ und $\dot{x}(t)$ einmal gleichzeitig verschwinden.

Die Funktion $r(t) = \sqrt{x^2(t) + \dot{x}^2(t)}$ gibt den Abstand eines Punktes vom Ursprung der Phasenebene zur Zeit t an.

Hilfssatz 2: Bei jeder nach den Vorschriften R_α oder R_∞ geregelten Bewegung ist die Funktion r(t) monoton fallend, d.h., die Bewegung klingt ab und es gibt keine periodischen Lösungen.

Es gibt in der Nähe des Ursprungs (der Phasenebene) zwei "Grenzpunkte" $(\pm x_0^*, 0)$ mit der Eigenschaft: Die bei $(\pm x_0^*, 0)$ beginnenden geregelten Intervalle enden ganz im Ursprung. Zu jedem x_0 mit $|x_0| < x_0^*$ gibt es genau einen $\dot{x}_0$-Wert mit der Eigenschaft, daß das bei $(x_0, \dot{x}_0)$

beginnende Regelintervall im Ursprung endet. Alle Wertepaare $(x_0, \dot{x}_0)$ mit der eben genannten Eigenschaft bilden in der Phasenebene eine stetige Kurve, im folgenden Grenzkurve genannt. Diese beginnt bei $(x_0^*, 0)$, geht durch (0,0) und endet bei $(-x_0^*, 0)$. Zwischen $(x_0^*, 0)$ und (0,0) verläuft die Grenzkurve ganz im 4. Quadranten, zwischen (0,0) und $(-x_0^*, 0)$ liegt sie im 2. Quadranten. Die Abschnitte der x-Achse von $-x_0^*$ bis 0 bzw. von 0 bis x_0^* und die Grenzkurve begrenzen zwei Bereiche $\mathfrak{L}^{(-)}$ und $\mathfrak{L}^{(+)}$, und es sei $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^{(-)} \cup \mathfrak{L}^{(+)}$ gesetzt.

Satz 1: Bei beliebiger Wahl der Anfangswerte $(x_0, \dot{x}_0) \neq (0,0)$ wird eine nach einem der Verfahren R_α oder R_∞ geregelte Schwingung (1) in der Phasenebene zunächst durch eine gegen den Ursprung konvergierende Spirallinie dargestellt. Sobald ein Anschaltpunkt in $\mathfrak{L}$ liegt, geht die Spirallinie über in eine Zackenlinie, die sich schließlich von einer Seite her dem Ursprung annähert. Liegt einer der Anschaltpunkte auf der Grenzlinie, dann endet mit dem folgenden Intervall die Gesamtbewegung im Ursprung.

Es gibt einen Teilbereich $\mathfrak{L}^*$ von $\mathfrak{L}$, der erheblich kleiner als $\mathfrak{L}$ ist, und es gilt damit

Satz 2: Jede nach einem der Verfahren R_α oder R_∞ geregelte Bewegung zeigt mindestens solange ein besseres Abklingen gegenüber der ungeregelten Bewegung mit denselben Anfangswerten, als kein Anschaltpunkt in $\mathfrak{L}^*$ liegt.

Die Bereiche $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}^*$ wurden analytisch und numerisch genau bestimmt. Für kleine Dämpfungswerte ζ ist $\mathfrak{L}^*$ so klein, daß die in Satz 2 enthaltene Einschränkung praktisch nicht spürbar wird.

§3. Die geregelte Bewegung bei beliebiger Schaltgeraden (System A)

Die in §1 formulierte Regelungsaufgabe wollen wir bei beliebiger Wahl des Parameters ϱ $(-\infty < \varrho \leq +\infty)$ kurz mit $R_{[A,\varrho]}$ bzw. $R_{[B,\varrho]}$ bezeichnen, je nachdem System A oder System B vorliegt.

Wir erwähnten in §2 u.a., daß eine nach dem Verfahren $R_{[A,0]}$ (dort R_∞ genannt) geregelte Bewegung (1) vollständig abklingt, weil die Abstands-

funktion r(t) monoton fällt (Hilfssatz 2). Bei den nach $R_{[A,\varrho]}$ ($\varrho \neq 0$) geregelten Bewegungen wird r(t) während eines Intervalls i.a. auch positive Werte annehmen können, die Monotonität von r(t) wird verlorengehen. Es ist anzunehmen, daß bei geeigneten Anfangs- und Parameterwerten $(x_0, \dot{x}_0)$ bzw. ϱ die Abstandsfunktion r(t) am Ende eines Intervalls denselben Wert wie am Anfang hat, daß also periodische Lösungen existieren.

Eine periodische Lösung [1]) liegt vor, wenn zwischen dem Anfangswert x_0 [2]) und dem Endwert x_1 [3]) eines Intervalls (einer nach einem unserer Verfahren geregelten Bewegung) die Beziehung

(7) $$x_1 = \mp x_0$$

besteht ($x_1 = x(t_1)$, t_1 sei die Zeitdauer des Intervalls). Wenn in (7) das obere Vorzeichen gilt, haben wir eine periodische Lösung mit der Periodenlänge $2t_1$, welche zentralsymmetrisch in der Phasenebene liegt. Das folgende Intervall beginnt bei $-x_0$ und endet nach t_1 Zeiteinheiten bei $-x_1 = x_0$. - Im Falle $x_1 = +x_0$ hätten wir eine periodische Lösung, die nicht mehr zentralsymmetrisch in der Phasenebene ist. Eine weitere nicht zentralsymmetrische periodische Lösung beginnt bei $-x_0$ (und endet bei $-x_1 = x_0$). Beide Typen periodischer Lösungen kommen vor.

Die Differentialgleichung

(8) $$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + x = \pm\,(t - t_{n-1})\,\mathrm{sgn}(\dot{x} + \varrho x)$$

wird bei $\mathrm{sgn}(\dot{x} + \varrho x) = -1$ und System A durch

(9) $$x(t) = e^{-\zeta t}\left[(x_0 + 2\zeta)\cos\omega t + \frac{1}{\omega}(\dot{x}_0 + \zeta x_0 + 2\zeta^2 - 1)\sin\omega t\right] + t - 2\zeta$$

gelöst (bei $\mathrm{sgn}(\dot{x} + \varrho x) = +1$ treten lediglich Vorzeichenänderungen auf). Die erste Ableitung lautet

(10) $$\dot{x}(t) = e^{-\zeta t}\left[(x_0 - 1)\cos\omega t - \frac{1}{\omega}(x_0 + \zeta\dot{x}_0 + \zeta)\sin\omega t\right] + 1.$$

Wird in (9) und (10) die Zeitvariable t durch t_1 ersetzt, und werden weiter x_0 und x_1 mittels der Gleichungen $\dot{x}_0 = -\varrho x_0$, $\dot{x}_1 = -\varrho x_1$ eli-

---

[1]) Die Anfangswerte einer periodischen Lösung erfüllen die Gleichung $\dot{x}_0 + \varrho x_0 = 0$, die Anfangswerte liegen also auf der Schaltgeraden.

[2]) Genauer wäre der Anfangswert mit $(x_0, -\varrho x_0)$ zu bezeichnen.

[3]) Genauer wäre der Endwert mit $(x_1, -\varrho x_1)$ zu bezeichnen.

miniert, so lassen sich nach einfacher Rechnung x_0 und x_1 in Abhängigkeit von t_1 und ϱ so darstellen:

(11) $\qquad x_0 = x_0(t_1;\varrho) = \frac{1}{\varrho}\, g(t_1;\varrho)$

(12) $\qquad x_1 = x_1(t_1;\varrho) = \frac{1}{\varrho}\, h(t_1;\varrho).$

Die Funktionen $g(t_1;\varrho)$, $h(t_1;\varrho)$ und die Konstante $\overline{\varrho}$ ergeben sich aus der Rechnung.

Es ist nun der Funktionsverlauf von $g(t_1;\varrho)$ und $h(t_1;\varrho)$ sowie von $g(t_1;\varrho) \pm h(t_1;\varrho)$ zu untersuchen. Jede Nullstelle von $g(t_1;\varrho) + h(t_1;\varrho)$ bzw. $g(t_1;\varrho) - h(t_1;\varrho)$ ist dann gleichbedeutend mit der Existenz einer zentralsymmetrischen periodischen Lösung bzw. eines Paares von nicht zentralsymmetrischen periodischen Lösungen. - Aus dem Funktionsverlauf von $g(t_1;\varrho)$ und $h(t_1;\varrho)$ läßt sich die Stabilität (im Sinne von F.KLEIN) der auftretenden periodischen Lösungen herleiten.

Wir geben hier folgende Tabelle über Existenz und Stabilität periodischer Lösungen an:

1) $\varrho = +\infty$

a) $\zeta = 0$
Nullösung: instabil

b) $0 < \zeta < 1$
Nullösung: instabil
Periodische Lösung: stabil

2) $\varrho_p < \varrho < +\infty$ [1])

a) $\zeta = 0$
Nullösung: instabil

b) $0 < \zeta < 1$
Nullösung: stabil
Innere periodische Lösung: instabil
Äußere periodische Lösung: stabil

3) $\varrho = \varrho_p$

a) $\zeta = 0$
Nullösung: instabil

b) $0 < \zeta < 1$
Nullösung: stabil
Periodische Lösung: instabil (nach innen)
stabil (nach außen)

4) $0 < \varrho < \varrho_p$
Nullösung: stabil

5) $\varrho^* < \varrho < 0$ [2])
Nullösung: instabil
Paar periodischer Lösungen: stabil

---

[1]) $\varrho_p = \varrho_p(\zeta)$ ist eine nur von ζ abhängige Konstante.

[2]) Die Definition von ϱ^* kann hier nicht gegeben werden.

6) $\varrho = \varrho^*$
   a) $\zeta = 0$
      Nullösung: instabil
      Paar periodischer Lösungsscharen: stabil
   b) $0 < \zeta < 1$
      Nullösung: instabil
      Paar periodischer Lösungen: stabil

7) $\varrho_1 < \varrho < \varrho^*$ [1])
   a) $0 < \zeta < \zeta^*$ [1])
      Nullösung: instabil
      Paar periodischer Lösungen: instabil
   b) $\zeta = \zeta^*$
      Nullösung: instabil
   c) $\zeta^* < \zeta < 1$
      Nullösung: instabil
      Paar periodischer Lösungen: stabil

8) $\varrho_2 < \varrho < \varrho_1$ [1])
   a) $0 \leq \zeta \leq \zeta^*$
      Nullösung: instabil
   b) $\zeta^* < \zeta < 1$
      Nullösung: instabil
      1. Paar periodischer Lösungen: stabil
      2. Paar periodischer Lösungen: instabil

9) $\varrho = \varrho_2$
   a) $0 \leq \zeta \leq \zeta^*$
      Nullösung: instabil
   b) $\zeta^* < \zeta < 1$
      Nullösung: instabil
      Paar periodischer Lösungen: stabil (nach innen),
      instabil (nach außen)

10) $\varrho < \varrho_2$
    Nullösung: instabil

§4. Die geregelte Bewegung bei beliebiger Schaltgeraden (System B)

Als Analogon zu den Gleichungen (11) und (12) erhalten wir bei System B die Beziehungen

(11a) $$x_o = x_o(t_1;\varrho) = -\frac{1}{\varrho}\, g(t_1;\varrho),$$

(12a) $$x_1 = x_1(t_1;\varrho) = -\frac{1}{\varrho}\, h(t_1;\varrho).$$

System B läßt sich also genau so behandeln wie System A. Es genügen hier die folgenden Angaben über Stabilität der auftretenden periodischen Lösungen (bei System B gibt es nur zentralsymmetrische periodische Lösungen):

---

[1]) Die Definition von ζ^*, ϱ_1 und ϱ_2 kann hier nicht gegeben werden.

1) $\varrho < \tilde{\varrho}$ [1])

a) $\zeta = 0$
Nullösung: instabil

b) $0 < \zeta < 1$
Nullösung: instabil
Periodische Lösung: stabil

2) $\varrho = \tilde{\varrho}$

a) $\zeta = 0$, $\tilde{\zeta} < \zeta < 1$ [1])
Nullösung: instabil

b) $0 < \zeta < \tilde{\zeta}$
Nullösung: instabil
Periodische Lösung: stabil

Für $\varrho > \tilde{\varrho}$ ist die Nullösung stets instabil. Bei kleineren ζ-Werten können bis zu zwei zentralsymmetrische periodische Lösungen existieren. Sobald bei einer allgemeinen Lösung der Regelungsaufgaben $R_{[B,\varrho]}$ ein Schaltpunkt x_n auftritt mit $|x_n| > c_\varrho$, schaukelt sich die geregelte Bewegung auf (dabei ist c_ϱ eine von ϱ abhängige Konstante).

§5. Vergleich der geregelten mit der ungeregelten Bewegung

Durch die Regelung soll eine Störbewegung zu schnellem Abklingen gebracht werden. Gelegentlich ist man auch damit zufrieden bzw. sogar daran interessiert, daß geregelte Bewegungen gegen eine periodische Lösung mit kleiner Amplitude konvergieren.

Bei den hier untersuchten Verfahren zeigte sich ein vollständiges Abklingen nur bei System A, wenn der Parameter ϱ zwischen 0 und ϱ_p liegt. Im Falle $\varrho = 0$ wissen wir, daß (bis auf eine unwesentliche Einschränkung) die geregelte Bewegung rascher abklingt als es dieselbe Bewegung ohne Regelung tun würde.

Wir glauben, daß für beliebige Anfangswerte $(x_0, \dot{x}_0)$ das Abklingen mit dem Verfahren $R_{[A,0]}$ schneller erfolgt als bei $R_{[A,\varrho]}$ $(0 < \varrho < \varrho_p)$, weil nur bei $R_{[A,0]}$ die Abstandsfunktion $r(t)$ beständig monoton fällt. Numerische Rechnungen scheinen unsere Vermutungen zu bestätigen, doch wir konnten sie bisher weder beweisen noch widerlegen. Es gelang lediglich, den folgenden Satz zu beweisen (dabei sind $\hat{\varrho} < \varrho_p$ und k_ϱ Konstante):

Satz 3: Eine bei beliebigen Anfangswerten $(x_0, \dot{x}_0)$ beginnende, nach $R_{[A,\varrho]}$ $(0 < \varrho < \hat{\varrho})$ geregelte Bewegung klingt mindestens so lange rascher als die ebenfalls bei $(x_0, \dot{x}_0)$ beginnende ungeregelte Bewegung ab, als kein Schaltpunkt $|x_n| < k_\varrho$ erreicht wird.

[1]) Die Definition von $\tilde{\varrho}$ und $\tilde{\zeta}$ kann hier nicht gegeben werden.